



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**LONGITUD DE LA
CIRCUNFERENCIA**

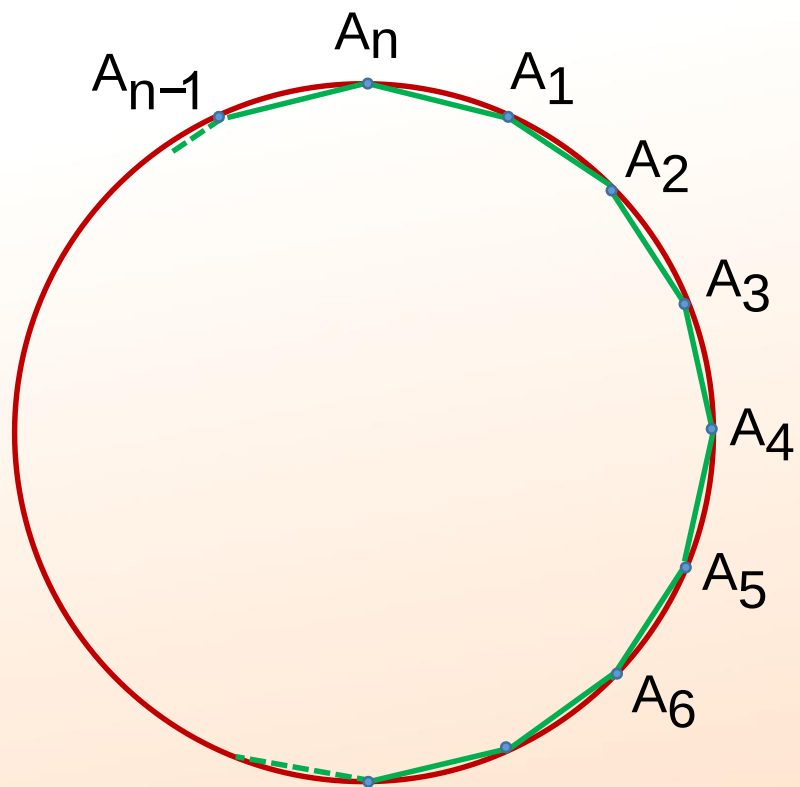
**CICLO
PRE
2024-1**



LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Definición

La longitud de una circunferencia, es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos.



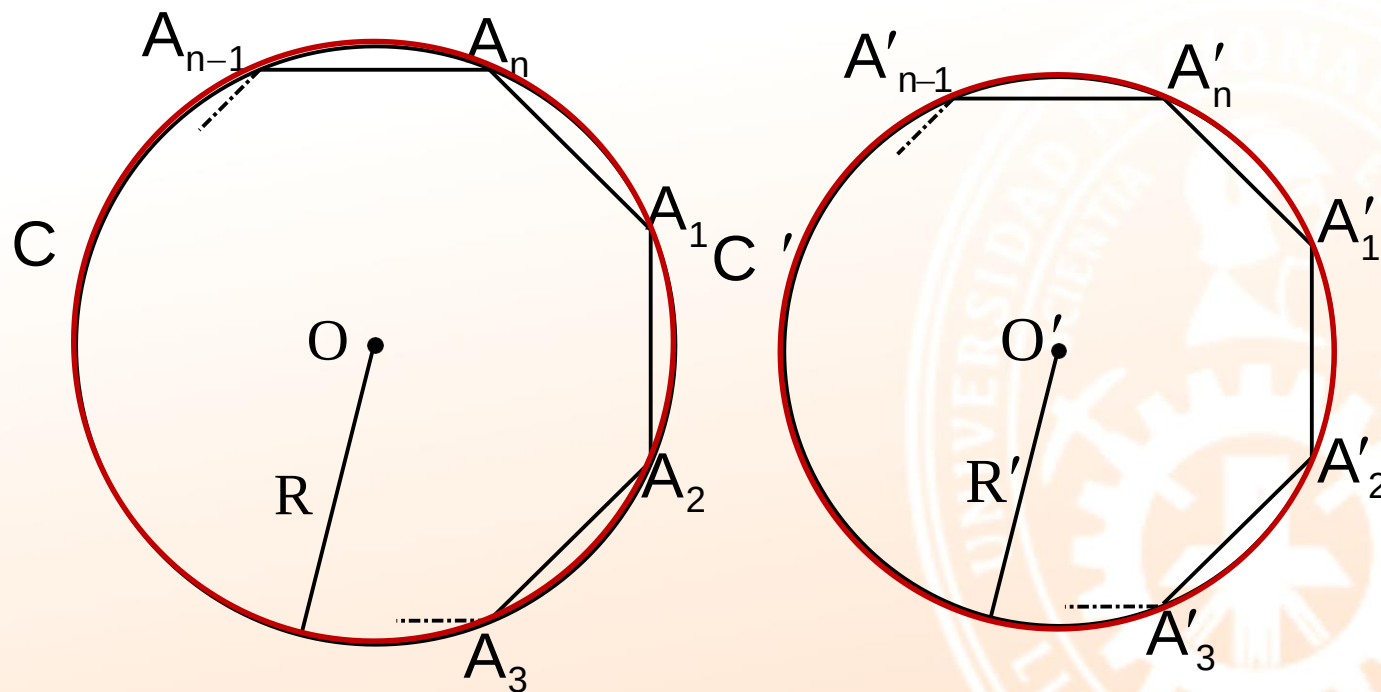
Si P_n es el perímetro del polígono regular $A_1A_2A_3 \dots A_n$ inscrito en la circunferencia C de longitud ℓ_c entonces

$$\ell_c = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

RAZÓN ENTRE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA Y EL DIÁMETRO

Teorema

La razón entre la longitud de una circunferencia y el diámetro, es la misma para todas las circunferencias.



En la circunferencias C y C' de centros O y O', de longitudes de radios R y R', se cumple:

$$\frac{l_C}{2R} = \frac{l_{C'}}{2R'}$$

EL NÚMERO π

Definición

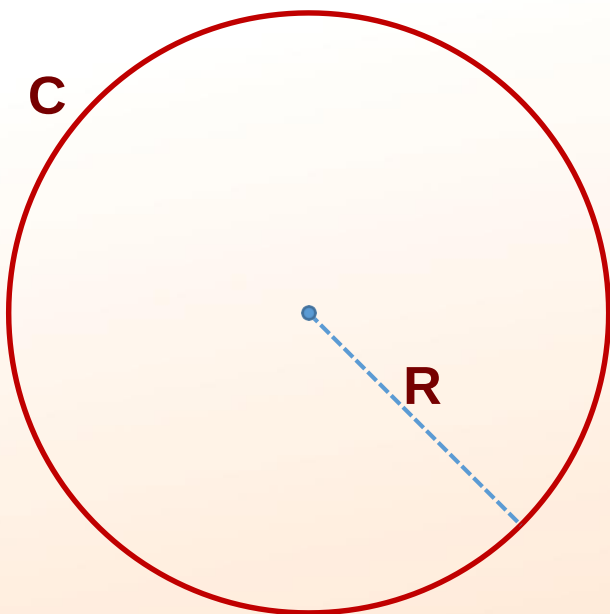
El número π es la razón constante $\frac{l_c}{2R}$.



LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA

Teorema

La longitud de una circunferencia de longitud de radio R , es $2\pi R$.



En la circunferencia C , de longitud de radio R :

$$\frac{\ell_C}{2R} = \pi$$

De donde, se tiene:

$$\ell_C = 2\pi R$$

APROXIMACIÓN DE π , CON EL MÉTODO DE LOS PERÍMETROS

Sean l_n y l_{2n} las longitudes de los lados de los polígonos regulares de n y $2n$ lados, inscritos en la circunferencia C , de longitud de radio R .

Sabemos que: $l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$

Para $n = 12$: $l_{24} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_{12}^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}}$

$$l_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \Rightarrow ap_{24} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\frac{P_{24}}{2ap_{24}} = \frac{24 \left(R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right)}{2 \left(\frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right)} = 3.159659942...$$

APROXIMACIÓN DE π , CON EL MÉTODO DE LOS PERÍMETROS

Para $n = 24$:

$$l_{48} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \frac{2}{24}}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)^2}}$$

$$l_{48} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \Rightarrow ap_{48} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$\frac{P_{48}}{2ap_{48}} = \frac{48 \left(R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \right)}{2 \left(\frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \right)} = 3.146086215...$$

APROXIMACIÓN DE π , CON EL MÉTODO DE LOS PERÍMETROS

Para $n = 48$:

$$r_{96} = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

$$ap_{96} = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

$$\frac{P_{96}}{2ap_{96}} = \frac{96 \left(R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \right)}{2 \left(\frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \right)} = 3.1427146...$$

APROXIMACIÓN DE π , CON EL MÉTODO DE LOS PERÍMETROS

Para $n = 96$:

$$r_{192} = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$$

$$ap_{192} = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$$

$$\frac{P_{192}}{2ap_{192}} = \frac{192 \left(R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}} \right)}{2 \left(\frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}} \right)} = 3.14187305...$$

APROXIMACIÓN DE π , CON EL MÉTODO DE LOS PERÍMETROS

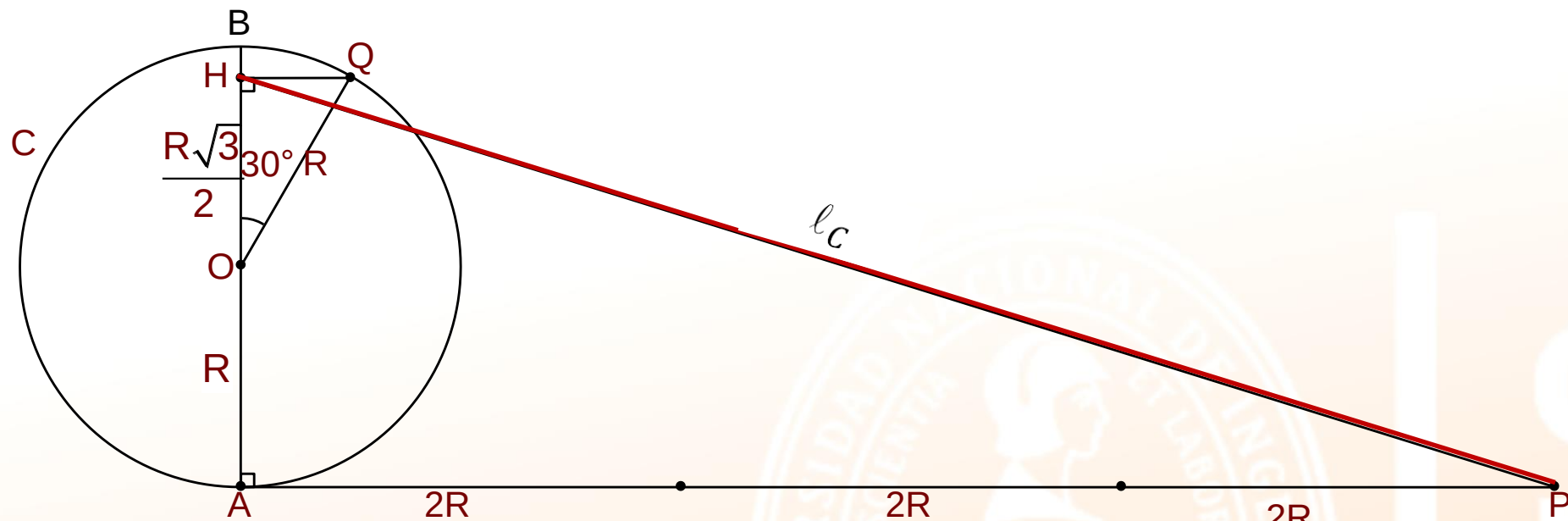
Para $n = 768$:

$$\frac{P_{1536}}{2ap_{1536}} = 3.1415639226333514 \dots$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n}{2ap_n} \right) = \frac{\ell_c}{2R} = 3.1415926535897932384626433832795 \dots$$

DETERMINACIÓN GRÁFICA Y ANALÍTICA, DE LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA



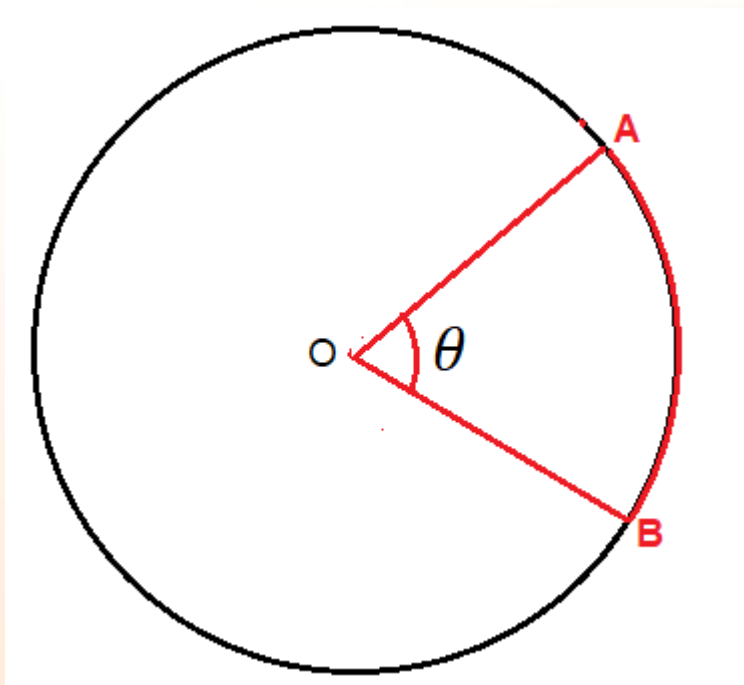
En la figura: $l_c^2 = \left[\frac{r}{2} (\sqrt{3} + 2) \right]^2 + (6R)^2 \Rightarrow l_c = \frac{R}{2} \sqrt{151 + 4\sqrt{3}}$

$$l_c = 2 \left(\frac{\sqrt{151 + 4\sqrt{3}}}{4} \right) R = 2 (3.141737210826554...) R$$

LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA

Teorema

Si la medida de un arco de circunferencia de centro O y arco C es θ , entonces la longitud del arco respectivo es $\left(\frac{\theta}{360}\right) l_c$, donde l_c es la longitud de la respectiva circunferencia



$$l_{\widehat{AB}} = \left(\frac{\theta}{360} \right) l_c$$

ce
pre
UNI